EPFL

Enseignants: Basterrechea, Dubuis, Huruguen
Algèbre linéaire & Géométrie - MAN
26 avril 2023
Durée : 3 heures

X

Examen Blanc (corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 10 pages, les dernières pouvant être vides. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est **interdite** pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

On donne les deux matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & 40 \\ -3 & -10 & -28 \\ 5 & 41 & 57 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -8 & -4 & -1 \\ 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Question 1 *(2 points)* Que vaut le déterminant de A ?

- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ 0
- ■ 12

Question 2 *(1 point)* Quel est le coefficient en position $(1, 2)$ de la matrice AB ?

- ☐ -25
- ☐ 91
- ■ -116
- ☐ -69

Question 3 *(1 point)* Quel est le rang de la matrice ABA ?

- ☐ 3
- ■ 2
- ☐ 4
- ☐ 1

Enoncé

On donne la base $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ de $\mathbb{R}^3$, où :

$$v_1 = (1, 0, 2), \quad v_2 = (2, -1, 5), \quad v_3 = (-3, 1, -9).$$

Question 4 *(2 points)* Que vaut la première coordonnée de $v = (1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}$?

- ☐ $\frac{3}{2}$
- ☐ $\frac{5}{2}$
- ■ $\frac{7}{2}$
- ☐ $\frac{1}{2}$

Question 5 *(1 point)* Parmi les éléments $v \in \mathbb{R}^3$ proposés ci-dessous, sélectionner celui qui vérifie que:

$$\mathrm{Vect}(v_3) \subset \mathrm{Vect}(v_1, v_2, v).$$

- ☐ $v = (30, 14, 46)$
- ☐ $v = (32, 35, 29)$
- ☐ $v = (22, 57, -13)$
- ■ $v = (41, 23, 61)$

Question 6 *(2 points)* Sélectionner la base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle $v = (3, -1, 8)$ a ses trois coordonnées égales.

- ■ $v_2, -v_3, v_1$
- ☐ $v_1, v_2, 3v_3$
- ☐ $2v_3, v_1, -v_2$
- ☐ $v_2, 2v_1, v_3$

Enoncé

On donne une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dont on sait qu'elle vérifie :

$$f(1,7) = (-3,2,1) \quad \text{et} \quad f^{-1}(\{(1,2,5)\}) = \{(3,-4)\}$$

Question 7 *(1 point)* Quel est le rang de f ?

- ☐ 3
- ■ 2
- ☐ 1
- ☐ 0

Question 8 *(2 points)* Parmi les éléments de $\mathbb{R}^3$ proposés ci-dessous, un seul appartient à $\operatorname{Im} f$. Lequel ?

- ☐ $(-1,-1,1)$
- ☐ $(-1,1,-1)$
- ☐ $(1,1,1)$
- ■ $(1,-1,-1)$

Question 9 *(1 point)* Que peut-on dire de l'ensemble $f^{-1}(\{(4,-6,1)\})$?

- ☐ c'est une droite affine de $\mathbb{R}^3$
- ■ il est vide
- ☐ c'est une droite affine de $\mathbb{R}^2$
- ☐ il contient un seul élément

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Sauf mention explicite du contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: *Cette question est notée sur 7 points.*

Dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ on donne, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -\alpha \\ 1 & 7+\alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Dans le cas où $\alpha = -1$, montrer que A est inversible et calculer sa matrice inverse.

(b) Prenons $\alpha = 2$. En détaillant votre réponse, trouver une décomposition colonne-ligne minimale de A.

(c) Déterminer le rang de A en fonction de la valeur de α.

Solution

(a) Pour $\alpha = -1$ on trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pour établir que A est inversible et calculer son inverse, résolvons le système linéaire général de matrice A. On obtient :

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = a \\ -3x + 3y + z = b \\ x + 6y + 4z = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + 2z = a \\ 12y + 7z = 3a + b \\ 3y + 2z = -a + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - (-a + c) \\ 3y + 2z = -a + c \\ -z = 3a + b - 4(-a + c) = 7a + b - 4c \end{cases} \Leftrightarrow \cdots$$

$$\cdots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - c \\ y = \frac{1}{3}(-a + c - 2(-7a - b + 4c)) \\ z = -7a - b + 4c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - c \\ y = \frac{13}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{7}{3}c \\ z = -7a - b + 4c. \end{cases}$$

On trouve donc toujours une unique solution. La matrice A est donc bien inversible, et on a :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ \frac{13}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ -7 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Pour $\alpha = 2$ on trouve :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -2 \\ 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Appelons L_1, L_2 et L_3 ses lignes. On voit alors que :

$$L_2 + 3L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_3 - L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que :

$$L_2 + 3L_1 = 2(L_3 - L_1) \quad \text{ou encore que} \quad L_2 = -5L_1 + 2L_3.$$

La matrice A admet donc la décomposition suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} L_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} L_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Comme A n'est pas de rang inférieur ou égal à 1 (ses lignes ne sont pas deux-à-deux proportionnelles) on voit donc qu'elle est de rang 2 et que la décomposition que l'on vient d'écrire est minimale.

(c) Calculons le déterminant de A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -\alpha \\ 1 & 7+\alpha & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 12 & 6-\alpha \\ 0 & 4+\alpha & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 6-\alpha \\ 4+\alpha & 2 \end{vmatrix} = \alpha^2 - 2\alpha.$$

Si $\alpha \neq 0, 2$ alors le déterminant de A est non nul, si bien que A est de rang 3. Si $\alpha = 2$ on a vu au (b) que A est de rang 2. Enfin, pour $\alpha = 0$ on a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que les colonnes de A ne sont pas deux-à-deux proportionnelles : elle est donc de rang supérieur ou égal à 2. Or son déterminant est nul : elle est donc de rang 2.

Question 11: *Cette question est notée sur 8 points.*

On donne les éléments suivants de $\mathbb{R}^2$:

$$v_1 = (3,2)\,,\ v_2 = (4,-1)\,,\ v_3 = (2,5)\,,\ v_4 = (-2,6)\,,\ v = (x,y).$$

On note V la droite affine de $\mathbb{R}^2$ contenant v_1 et v_2.

(a) Montrer que $\mathcal{B} = v_1, v_2$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et calculer $[v]_{\mathcal{B}}$ en fonction de x et y.

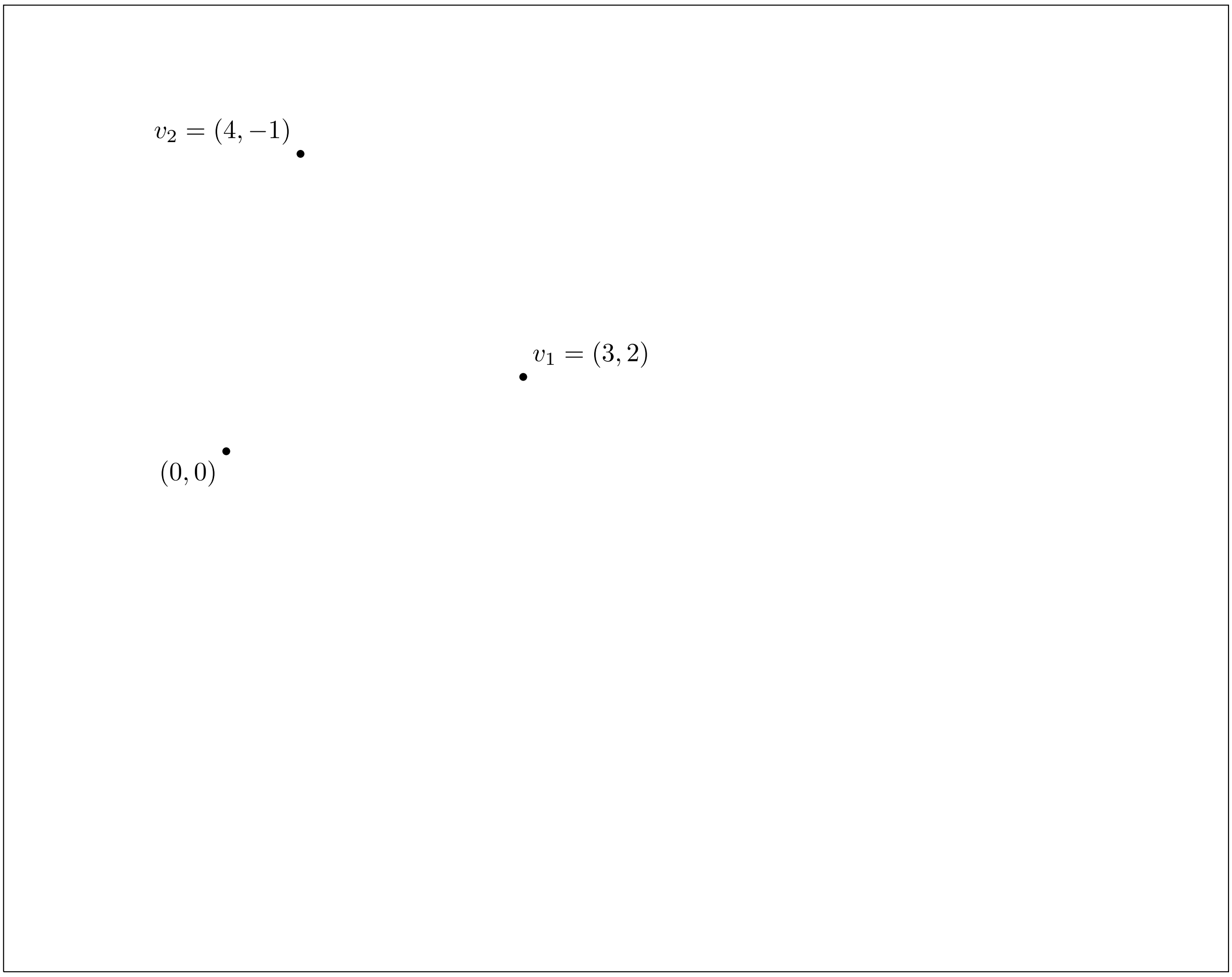
(b) En expliquant votre démarche, placer (approximativement) v_3 sur le dessin ci-dessous.

(c) Déterminer la matrice de changement de coordonnées de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, où :

$$\mathcal{B}' = v_4, 3v_2.$$

(d) Tracer V sur le dessin et déterminer une équation de V.

(e) On suppose que $v \in V$. Montrer par un calcul que le parallélogramme construit sur v, v_4 et celui construit sur v_2, v_1 ont la même orientation.



Solution

(a) Pour montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ il suffit de constater que v_1 et v_2 ne sont pas proportionnels. On peut aussi calculer le déterminant:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11$$

et observer qu'il est non nul. Dans ces conditions, on sait que ($\mathcal{B}_{\text{can}}$ étant la base canonique de $\mathbb{R}^2$):

$$[v]_{\mathcal{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1}}_{\text{changement de coordonnées de } \mathcal{B}_{\text{can}} \text{ à } \mathcal{B}} [v]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = -\tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} x+4y \\ 2x-3y \end{pmatrix}.$$

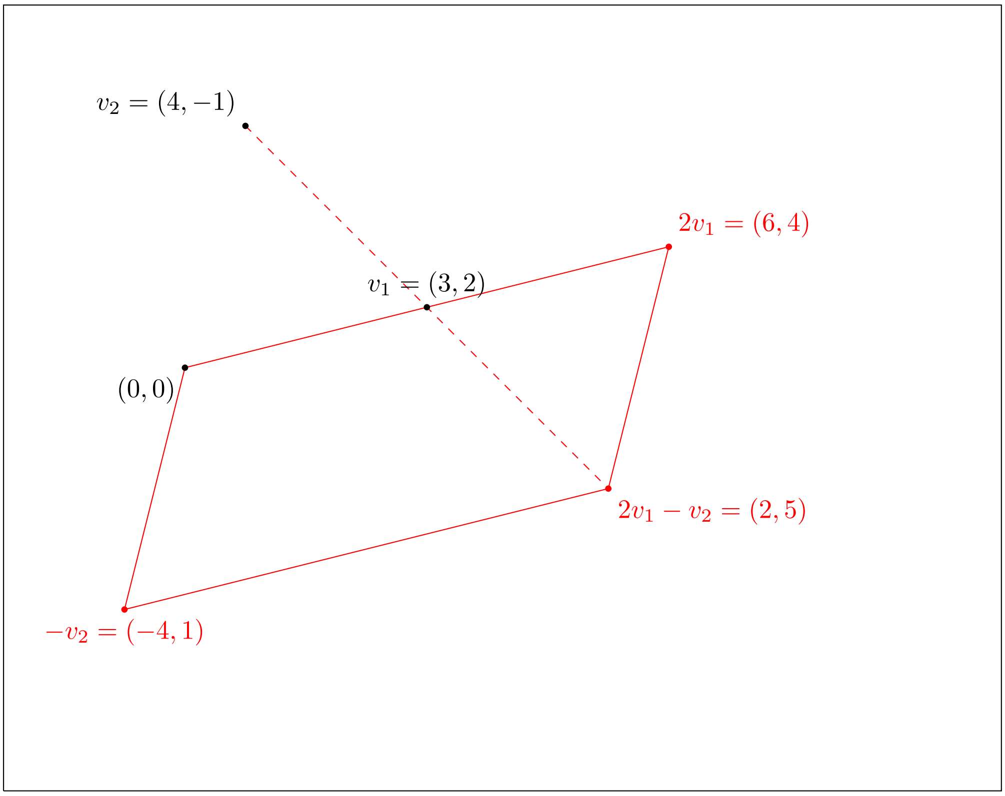
(b) D'après le (a), on a :

$$[v_3]_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 2+4\cdot 5 \\ 2\cdot 2 - 3\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad v_3 = 2v_1 - v_2.$$

On peut alors construire successivement $2v_1$ puis $-v_2$, et enfon v_3 (en faisant apparaitre un parallélogramme). On peut aussi réécrire la relation ci-dessus sous la forme :

$$v_1 = \tfrac{1}{2}(v_2 + v_3)\,,$$

qui permet de placer v_3 de sorte à ce que v_1 se situe au milieu entre v_2 et v_3.



(c) Appelons P la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. D'après la formule trouvée au (a) on voit que la première colonne de P est:

$$[v_4]_{\mathcal{B}} = \tfrac{1}{11}\begin{pmatrix} -2+4\cdot 6 \\ 2\cdot(-2) - 3\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, sa deuxième colonne est égale à :

$$[3v_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad 3v_3 = 0v_1 + 3v_2.$$

La matrice Q recherchée, c'est-à-dire la matrice de changement de coordonnées de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ n'est autre que l'inverse de P:

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(d) La droite vectorielle W associée à V est celle engendrée par:

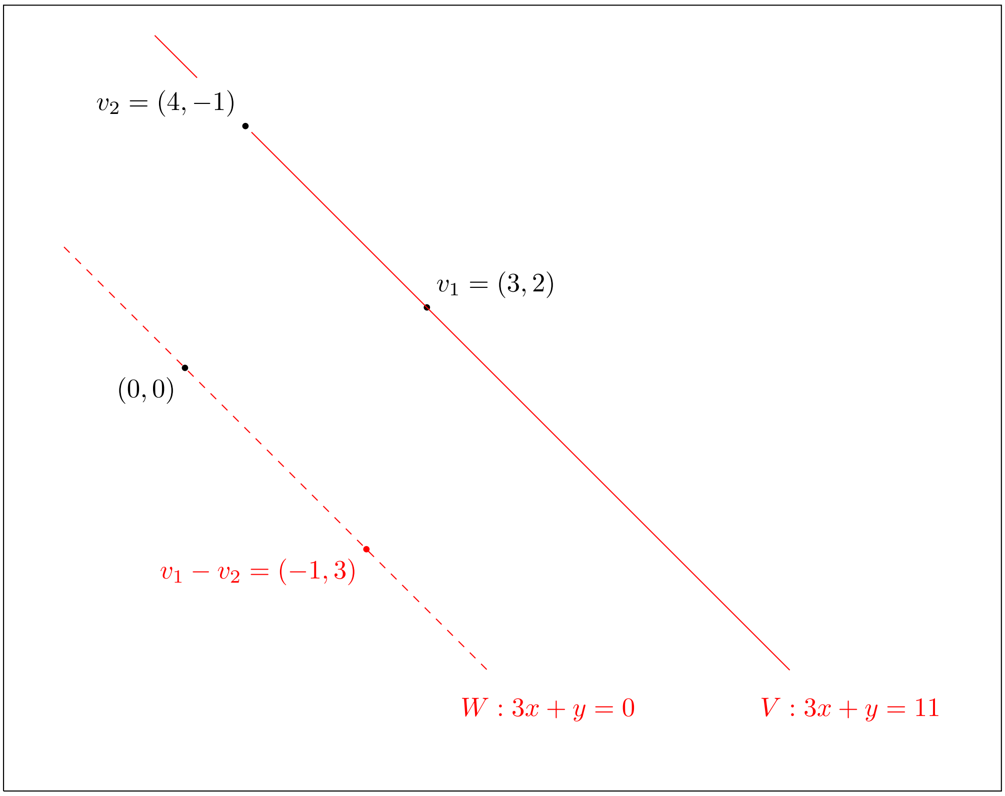
$$v_1 - v_2 = (-1, 3).$$

Elle admet donc pour équation:

$$W : \begin{vmatrix} x & -1 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 3x + y = 0.$$

Par conséquent, V admet quant à elle l'équation :

$$V : 3x + y = 3 \cdot 3 + 2 = 11.$$



(e) Appelons e_1, e_2 les vecteurs de $\mathcal{B}_{\text{can}}$. On sait alors que l'on a d'une part:

$$\sigma(v, v_4) = \begin{vmatrix} x & -2 \\ y & 6 \end{vmatrix} \sigma(e_1, e_2) = (6x + 2y)\sigma(e_1, e_2) = \underbrace{22\sigma(e_1, e_2)}_{\text{car } 3x+y=11}$$

et, d'autre part:

$$\sigma(v_2, v_1) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \sigma(e_1, e_2) = 11\sigma(e_1, e_2).$$

Il apparait alors que:

$$\sigma(v, v_4) = 2\sigma(v_2, v_1)$$

si bien que les parallélogrammes construits sur v, v_4 et v_2, v_1 ont la même orientation (sens indirect dans le cas représenté sur le dessin).

Question 12: *Cette question est notée sur 7 points.*

■0 □1 □.5 □2 □.5 □3 □.5 □4 □.5 □5 □.5 □6 □.5 □7 □.5

On suppose donnée une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant les conditions suivantes:

$$f \circ f = 0 \quad \text{et} \quad f(2,3,5) = f(-1,0,3) = (1,2,-1).$$

(a) Déterminer le rang de f puis une base de $\operatorname{Im} f$.

(b) Décrire $\operatorname{Ker} f$ par une (ou des) équation(s).

(c) Déterminer l'expression de $f(x,y,z)$ en fonction de x, y et z.

Solution

(a) L'hypothèse que $f \circ f$ est l'application nulle entraine que $\operatorname{Im} f$ est contenu dans $\operatorname{Ker} f$. En effet:

$$\underbrace{v}_{f(x,y,z)} \in \operatorname{Im} f \quad \Rightarrow \quad \underbrace{f(v)}_{f(f(x,y,z))} = (0,0,0) \quad \Rightarrow \quad v \in \operatorname{Ker} f.$$

La dimension de $\operatorname{Im} f$ est donc inférieure ou égale à la dimension de $\operatorname{Ker} f$. Or :

$$\dim(\operatorname{Im} f) = \operatorname{rg} f \quad \text{et} \quad \dim(\operatorname{Ker} f) = 3 - \operatorname{rg} f,$$

la dernière égalité ayant lieu par le théorème du rang. On en déduit alors :

$$\operatorname{rg} f \leqslant 3 - \operatorname{rg} f$$

ce qui, du fait que le rang est un entier, montre que f est de rang 0 ou 1. Comme $\operatorname{Im} f$ n'est pas le sous-espace nul (puisqu'il contient $(1,2,-1)$), on voit donc que $\operatorname{rg} f = 1$: $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle, à savoir celle engendrée par $(1,2,-1)$ et $\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel.

(b) On a vu au a. que $\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel qui contient :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((1,2,-1)).$$

En particulier, le triplet $(1,2,-1)$ est dans le noyau de f. Par ailleurs, en utilisant la donnée de l'énoncé et la linéarité de f on trouve:

$$f(2,3,5) - f(-1,0,3) = f(3,3,2) = (0,0,0).$$

Autrement dit, $(3,3,2)$ est aussi élément du noyau de f. On voit donc que $\operatorname{Ker} f$ a pour équation:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ y & 2 & 3 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} z = 7x - 5y - 3z = 0.$$

(c) L'application f étant de rang 1, on sait, au vu des résultats du a. et du b., qu'elle possède une expression du type:

$$f(x,y,z) = \alpha(7x - 5y - 3z)(1,2,-1)$$

où α est un réel non nul. On obtient alors:

$$f(-1,0,3) = -16\alpha(1,2,-1) = (1,2,-1) \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\tfrac{1}{16}.$$

Autrement dit, f est donnée par la formule:

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{16}(7x - 5y - 3z)(-1,-2,1).$$